Über die Diskriminante der n-ten Teilwerte der Weierstraßschen $\wp$-Funktio

(On the discriminant of the n^{th} division values of Weierstrass' $\wp$-function)

I. Resultante und Diskriminante

Es seien

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad (a_0 \neq 0),$$
$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n \quad (b_0 \neq 0)$$

zwei Polynome mit Koeffizienten aus einem Integritätsbereich (integral domain). Dann heißt die $(m+n)$-reihige Determinante

$$R_x(f,g) := \left|\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & & \\ & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_m & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \end{array}$$

(leere Stellen sind durch Nullen zu besetzen)

die Resultante oder Sylvestersche Determinante der Polynome $f(x)$, $g(x)$ (in dieser Reihenfolge), kurz mit $R(f,g)$ bezeichnet.

Ein Spezialfall der Resultante ist die Diskriminante.

Sei wieder

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad (a_0 \neq 0)$$

ein Polynom vom positiven Grad m. Seine Ableitung (derivative) ist

$$f'(x) = m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \dots + a_{m-1}.$$

Schreibt man, falls der Grad $m > 1$ ist, die Resultante von $f(x)$ und $f'(x)$ als Sylvestersche Determinante an, so haben die Elemente der ersten Spalte den gemeinsamen Faktor a_0. Daher hat auch die Resultante den Faktor a_0

Daher setzt man, unter Beifügung eines zweckmäßigen Vorzeichens,

$$R(f,f') = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot a_0 \cdot D(f) \qquad (m>1).$$

Dann ist in Determinantenform

$$D(f) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & \cdots & \cdots & a_m \\ m & (m-1)a_1 & \cdots & a_{m-1} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & m a_0 & \cdots & \cdots & a_{m-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-1 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \end{matrix} ;$$

für $m=1$ wird $D(a_0 x + a_1) = 1$ definiert.
Diese mit einem Vorzeichen versehene Determinante D heißt die <u>Diskriminante</u> des Polynoms $f(x)$, genauer bezeichnet mit $D_x(f(x))$.
Für die Diskriminante eines Produktes gilt die wichtige <u>Formel</u>:

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot D(g) \cdot [R(f,g)]^2 .$$

Die Verallgemeinerung dieser Formel auf n polynomische Faktoren lautet:

$$D\left(\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{n} D(f_\nu) \cdot \prod_{\lambda>\mu}^{1,n} [R(f_\lambda, f_\mu)]^2 .$$

Bei der Definition von Resultante (und Diskriminante) spielen die Koeffizienten der fraglichen Polynome die entscheidende Rolle. Es ist nun aber eine entscheidende Tatsache, daß man die Resultante zweier Polynome auch durch die Wurzeln dieser Polynome ausdrücken kann. Insbesondere gilt dies für die Diskriminante eines Polynoms.

Hierfür gelten die beiden fundamentalen Formeln:

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{m-2} \prod_{\mu=1}^{m} f'(\xi_\mu),$$

$$D(f(x)) = a_0^{2m-2} \prod_{\mu>\lambda}^{1,m} (\xi_\mu - \xi_\lambda)^2 .$$

Hierbei bezeichnen $\xi_1, \dots\dots, \xi_m$ die Wurzeln des Polynoms

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad (a_0 \neq 0).$$

II. Die Diskriminante des Kreisteilungspolynoms

Das n-te (reduzible) Kreisteilungspolynom lautet:

$$f_n(x) = x^n - 1 \quad (n \geq 2), \quad a_0 = 1; \quad f_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\right).$$

Seine Wurzeln sind alle n-ten Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}$ $(\nu = 1, \dots, n)$. Die Diskriminante von $f_n(x)$ berechnet sich nach obiger Formel zu

$$D(f_n(x)) = D(x^n - 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \left(n e^{\frac{2\pi i}{n} \nu \cdot (n-1)}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^n \cdot e^{-\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \cdot n^n .$$

Es sei
$$F_n(x) := \prod_{\substack{\nu \bmod n \\ (\nu,n)=1}} \left(x - e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\right) \in \mathbb{Z}[x]$$
dasjenige Polynom, dessen Wurzeln die $\varphi(n)$ primitiven n-ten Einheitswurzeln sind. Dann besteht mit $f_n(x)$ der Zusammenhang
$$f_n(x) = x^n - 1 = \prod_{d \mid n} F_{\frac{n}{d}}(x).$$
Daraus folgt nach der Möbiusschen Umkehrformel für Produkte:
$$F_n(x) = \prod_{d \mid n} \left(x^{\frac{n}{d}} - 1\right)^{\mu(d)}.$$
Dieses ganzzahlige normierte Polynom $F_n(x)$ hat für $n > 2$ die Diskriminante
$$D(F_n(x)) = (-1)^{\frac{\varphi(n)[\varphi(n)-1]}{2}} \cdot \prod_{\substack{\nu \bmod n \\ (\nu,n)=1}} F_n'\left(e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \cdot \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p \mid n} p^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p)}}} =$$
$$= (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \cdot \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p \mid n} p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}.$$
Beachte: $\varphi(n)$ ist für $n > 2$ stets gerade.

Diese tiefliegende Formel ist mit elementaren Mitteln von G. Rados in der Arbeit „Die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung", veröffentlicht in Crelles Journal, Bd. 131, S. 49–55, hergeleitet worden.

III. Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen

Es sei u eine komplexe Variable; es sei ferner $\mathfrak{w} = [\omega_1, \omega_2]$ ein komplexes Gitter, wo $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine beliebig orientierte $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{w}$ ist. Hierzu gehört die nur von u und vom Gitter $\mathfrak{w}$ abhängige <u>Weierstraßsche σ-Funktion</u>

$$\sigma(u|\mathfrak{w}) = \sigma(u|\omega_1, \omega_2) = \sigma(u) :=$$

$$:= u \prod_{\omega_{\mu\nu} \in \mathfrak{w}}{}' \left(1 - \frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right) e^{\frac{u}{\omega_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right)^2}$$

$$\text{mit } \omega_{\mu\nu} := \mu\omega_1 + \nu\omega_2, \ (\mu, \nu) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$\sigma(u|\mathfrak{w})$ ist eine ganze transzendente, ungerade Funktion von u, welche genau in allen Gitterpunkten von $\mathfrak{w}$ Nullstellen, und zwar jeweils von erster Ordnung, hat.
Hieraus erhält man durch logarithmische Differentiation die nur von u und vom Gitter $\mathfrak{w}$ abhängige
<u>Weierstraßsche ζ-Funktion</u>

$$\zeta(u|\mathfrak{w}) = \zeta(u|\omega_1, \omega_2) = \zeta(u) :=$$

$$:= \frac{1}{u} + \sum_{\omega_{\mu\nu} \in \mathfrak{w}}{}' \left[\frac{1}{u - \omega_{\mu\nu}} + \frac{1}{\omega_{\mu\nu}} + \frac{u}{\omega_{\mu\nu}^2}\right].$$

$\zeta(u|\mathfrak{w}) = \dfrac{\sigma'(u|\mathfrak{w})}{\sigma(u|\mathfrak{w})}$ ist eine meromorphe, ungerade Funktion von u, welche genau in allen Gitterpunkten von $\mathfrak{w}$ Pole, und zwar von erster Ordnung, hat.

Die beiden komplexen Zahlen

$$\eta_1 := 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\Big|\omega_1,\omega_2\right),\ \eta_2 := 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\Big|\omega_1,\omega_2\right)$$

heißen die zum Periodenpaar ω_1, ω_2 gehörigen <u>Periodizitätsmoduln</u>; ω_1, ω_2 und η_1, η_2 sind kogrediente Variablenpaare. Zwischen ihnen besteht die sogenannte <u>Legendresche Relation</u>

$$\begin{vmatrix}\omega_1 & \eta_1\\ \omega_2 & \eta_2\end{vmatrix} = \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = \pm 2\pi i ,$$

wobei das Vorzeichen $\pm$ der Orientierung von $\{\omega_1, \omega_2\}$ entspricht. Führt man den <u>Basisquotienten</u>

$$\omega := \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

ein, so ist die positive bzw. negative Orientierung von $\{\omega_1, \omega_2\}$ durch die Ungleichung

$$\operatorname{Im}\omega > 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}\omega < 0$$

bestimmt, wo $\operatorname{Im}\omega$ den Imaginärteil der komplexen Zahl ω bezeichnet.

Aus der Darstellung von $\zeta(u|\mathfrak{w})$ erhält man schließlich durch Differentiation und Übergang zum Negativen die nur von u und vom Gitter $\mathfrak{w}$ abhängige

<u>Weierstraßsche $\wp$ – Funktion</u>

$$\wp(u|\mathfrak{w}) = \wp(u|\omega_1,\omega_2) = \wp(u) :=$$
$$:= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega_{\mu\nu}\in\mathfrak{w}}{}' \left[\frac{1}{(u-\omega_{\mu\nu})^2} - \frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2}\right].$$

$\wp(u|\mathfrak{w}) = -\zeta'(u|\mathfrak{w})$ ist eine meromorphe, doppeltperiodische gerade Funktion von u, welche genau in allen Gitterpunkten von $\mathfrak{w}$ Pole, und zwar jeweils von zweiter Ordnung, hat. Das heißt, $\wp(u|\mathfrak{w})$ ist eine gerade <u>elliptische Funktion</u> zweiter Ordnung zum Gitter $\mathfrak{w} = [\omega_1, \omega_2]$.

Die Funktion $w = \wp(u)$ genügt der algebraischen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = w'^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3 .$$

Es ist also

$$\wp'^2(u) = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 ,$$

wo g_2 und g_3 die sogenannten <u>Invarianten</u> der $\wp$-Funktion bedeuten. Diese hängen nur vom Gitter $\mathfrak{w}$ ab und sind explizit gegeben als die <u>Eisensteinschen Reihen</u>

$$g_2(\mathfrak{w}) = g_2(\omega_1,\omega_2) = g_2 := 60 \sum_{\omega_{\mu\nu}\in\mathfrak{w}}{}' \frac{1}{\omega_{\mu\nu}^4} ,$$

$$g_3(\mathfrak{w}) = g_3(\omega_1,\omega_2) = g_3 := 140 \sum_{\omega_{\mu\nu}\in\mathfrak{w}}{}' \frac{1}{\omega_{\mu\nu}^6} .$$

Die hiermit gebildete, nur von $\mathfrak{w}$ abhängige Funktion

$$\Delta(\mathfrak{w}) = \Delta(\omega_1,\omega_2) = \Delta := g_2^3 - 27 g_3^2$$

heißt die <u>Diskriminante</u> der elliptischen Funktionen zum Gitter $\mathfrak{w} = [\omega_1,\omega_2]$. Hierfür gilt die grundlegende Tatsache

$$\Delta(\mathfrak{w}) \neq 0 \quad \text{für jedes komplexe Gitter } \mathfrak{w}.$$

Dies wird durch die tiefliegende Produktdarstellung

$$\Delta(\omega_1,\omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \left(e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi i \omega m}\right)\right)^{24}$$

in Evidenz gesetzt. Dabei ist die $\mathbb{Z}$-Basis $\{\omega_1,\omega_2\}$ von $\mathfrak{w}$ als positiv orientiert angenommen, was nach dem früher bereits Gesagten für den Basisquotienten $\omega := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ die Ungleichung $\operatorname{Im}\omega > 0$ zur Folge hat.

Mittels der Dedekindschen η — Funktion

$$\eta(\omega) := e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i \omega m}\right) \text{ für } \omega \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Im} \omega > 0$$

schreibt sich $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ auch in der knappen Gestalt

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \eta^{24}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) .$$

Definiert man schließlich die lokale Variable q durch

$$q := e^{2\pi i \omega} \text{ mit } |q| < 1 \text{ für } \omega \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Im} \omega > 0,$$

so erhält man für $\eta(\omega)$ die multiplikative q-Entwicklung

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^m\right) .$$

Aus der komplexen Multiplikation ist bekannt, daß die dort auftretenden konkreten Funktionen erst dann algebraische Zahlen liefern, wenn man sie durch passende Zusatzfaktoren normiert. Hierzu dienen für die folgenden Untersuchungen die nachstehenden Wurzeln aus der Diskriminante Δ, indem man diese unter Beachtung der oben angegebenen Produktdarstellung von Δ in naheliegender Weise wie folgt eindeutig definiert:

$$\sqrt[12]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} := \frac{2\pi}{\omega_2} \eta^{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) ,$$

$$\sqrt[6]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} := \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{2} \eta^{4}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) ,$$

$$\sqrt[4]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} := \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{3} \eta^{6}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) ,$$

$$\sqrt[3]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} := \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{4} \eta^{8}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) ,$$

$$\sqrt[2]{\Delta(\omega_1, \omega_2)} := \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{6} \eta^{12}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) .$$

Hierbei ist ausdrücklich zu bemerken, daß alle diese Bildungen von der stets als positiv orientiert vorausgesetzten Basis $\{\omega_1, \omega_2\}$ des Gitters $\mathfrak{w}$ abhängig und dementsprechend notiert sind. Diese Wurzeln sind also keine Gitterinvarianten!

Die von K. Weierstraß eingeführte Funktion $\psi_n(u|\mathfrak{w})$ ist für die Anwendung in Algebra und Zahlentheorie, vor allem für die Theorie und Praxis der elliptischen Einheiten von großer Bedeutung. Diese Funktion ist mittels der Weierstraßschen σ-Funktion durch

$$\psi_n(u|\mathfrak{w}) = \psi_n(u|\omega_1,\omega_2) = \psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$$

für jede nichtnegative ganze Zahl n eindeutig definiert. Als Quotient zweier ganzer Funktionen ist zunächst eine meromorphe Funktion. Darüber hinaus gilt, daß ψ_n eine doppeltperiodische Funktion zum Gitter $\mathfrak{w} = [\omega_1,\omega_2]$ ist. Insgesamt gilt also, daß die Weierstraßsche Funktion ψ_n eine elliptische Funktion zum Gitter $\mathfrak{w} = [\omega_1;\omega_2]$ ist. Überdies ist auf Grund ihrer Bildungsweise klar, daß ψ_n genau in allen Gitterpunkten von $\mathfrak{w}$ Pole, und zwar jeweils von der Ordnung n^2-1, hat.

Von L. Kiepert ist 1875 eine wichtige Darstellung von ψ_n in Gestalt einer Determinante angegeben worden. Diese explizite Formel sieht folgendermaßen aus:

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1!2!3!\dots(n-1)!)^2} \cdot \begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \dots & \wp^{(n-1)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \dots & \wp^{(n)}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \dots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix}.$$

Vermöge der Differentialgleichung $\wp'(u)^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$ berechnet man nun:

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \tfrac{1}{2}g_2\,,\quad \wp'''(u) = 12\wp(u)\cdot\wp'(u), \dots\dots.$$

Hiernach ist klar, daß alle Ableitungen gerader Ordnung von $\wp(u)$ ganze rationale Bildungen in $\wp(u)$ sind.

Allgemein gilt, daß sämtliche Ableitungen der elliptischen Funktion $\wp(u)$ als ganze rationale Funktionen von $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3 mit ganzzahligen Zahlenkoeffizienten darstellbar sind. Die Kiepertsche Determinante, durch welche die Funktion $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$ ausgedrückt ist, ist daher ebenfalls eine ganze rationale Funktion von $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3 mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Wenn nun n ungerade ist, so ist $\psi_n(u)$ eine gerade Funktion des Arguments u. Es ist dann $\psi_n(u)$ eine polynomische Bildung in $\wp(u)$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3.

Wenn dagegen n gerade ist, so ist $\psi_n(u)$ eine ungerade Funktion des Arguments u. Es ist dann $\frac{1}{\wp'(u)} \cdot \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \frac{1}{\wp'(u)} \cdot \psi_n(u)$ eine polynomische Bildung in $\wp(u)$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3.

Beachte: $\wp(u)$ ist eine elliptische Funktion 2. Ordnung, $\wp'(u)$ eine solche von 3. Ordnung.

Es besteht daher für alle ungeraden Indizes n eine Gleichung von der Form

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \frac{1}{(1!\,2!\,3!\cdots(n-1)!)^2} \cdot G\left(\wp(u); \tfrac{1}{2}g_2, g_3\right)_{\frac{1}{2}(n^2-1)},$$

und für alle geraden Indizes n eine Gleichung von der Form

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \frac{-\wp'(u)}{(1!\,2!\,3!\cdots(n-1)!)^2} \cdot G\left(\wp(u); \tfrac{1}{2}g_2, g_3\right)_{\frac{1}{2}(n^2-4)}.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $G\left(\wp(u); \frac{1}{2}g_2, g_3\right)_N$ eine ganze rationale Funktion von $\wp(u)$; $\frac{1}{2}g_2$, g_3 mit ganzen rationalen Koeffizienten und der Index N den Grad dieses Polynoms in bezug auf die Variable $\wp(u)$. Die explizite Berechnung der $\psi_n(u)$ ist aufwendig und langwierig. Trivial ist lediglich

$$\psi_0(u) = 0, \quad \psi_1(u) = 1.$$

Mittels der Kiepertschen Determinantenformel berechnet man sodann:

$$\psi_2(u) = -\wp'(u), \quad \psi_3(u) = 3\wp^4(u) - \frac{3}{2}g_2\wp^2(u) - 3g_3\wp(u) - \frac{1}{16}g_2^2,$$

$$\psi_4(u) = -\wp'(u)\Big(2\wp^6(u) - \frac{5}{2}g_2\wp^4(u) - 10g_3\wp^3(u) - \frac{5}{8}g_2^2\wp^2(u) - \frac{1}{2}g_2g_3\wp(u) + \frac{1}{32}g_2^3 - g_3^2\Big).$$

Die ψ_n genügen Rekursionsformeln, wodurch ihre xplizite Berechnung wesentlich erleichtert wird. So gilt die allgemeine Rekursionsformel

$$\psi_{m+n}\psi_{m-n} = \psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}\psi_m^2 .$$

Hiernach ist für $m = n+1$ wegen $\psi_1 = 1$ speziell

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3 \quad (n \geqq 2).$$

Ferner erhält man vermöge der Ersetzungen $m \mapsto n+1$, $n \mapsto n-1$ wegen $\psi_2 = -\wp'$ die spezielle Rekursionsformel

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{\wp'}\left(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}\right) \quad (n \geqq 3).$$

Die Weierstraßsche Funktion $\psi_n(u)$ läßt sich aktorisieren. Hierfür ist die Kenntnis der Nullstellenmenge von $\psi_n(u|\omega_1,\omega_2)$ erforderlich. Auf Grund ihrer Definition, als Quotient zweier σ-Funktionen, gilt:

$$\psi_n(u|\omega_1,\omega_2) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}{n} \quad (n \geqq 2)$$

$$\text{für alle } (\mu,\nu) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } (\mu,\nu) \not\equiv (0,0) \bmod n.$$

n volles System inkongruenter solcher n-ten Teilpunkte t zum Beispiel durch

$$\left\{\frac{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}{n} \,\Big|\, 0 \leqq \mu \leqq n-1,\ 0 \leqq \nu \leqq n-1;\ (\mu,\nu) \neq (0,0)\right\}$$

geben. Diese Teilpunkte liegen sämtlich in der von ω_1, ω_2 ufgespannten Grundmasche. Ihre Anzahl ist n^2-1, . Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die elliptische nktion $\psi_n(u)$ zum Gitter $\mathfrak{w} = [\omega_1, \omega_2]$ die Ordnung n^2-1 hat.

Auf Grund einfacher Überlegungen, wozu auch die Tatsache gehört, daß $\wp$ eine doppeltperiodische, gerade Funktion ist, läßt sich dann die Faktorisierung von $\psi_n(u|\omega_1,\omega_2)$ durchführen.

n ungerade, $n \geqq 3$

System der Indizes μ, ν

$$\left.\begin{aligned} &\mu = 1,2,\dots,\tfrac{n-1}{2}\,; \quad \nu = 1,2,\dots,n-1 \\ &\mu = 0\,; \qquad\qquad\quad \nu = 1,2,\dots,\tfrac{n-1}{2} \\ &\mu = 1,2,\dots,\tfrac{n-1}{2}\,; \quad \nu = 0\,. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Anzahl der}\\ \text{hieraus bildbaren}\\ \text{Indexpaare } (\mu,\nu)\\ = \frac{n^2-1}{2}\end{array}$$

Dann besteht notwendig die Identität

$$\psi_n(u|\omega_1,\omega_2) = n \prod_{\mu,\nu} \left(\wp(u|\omega_1,\omega_2) - \wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n}\middle|\omega_1,\omega_2\right)\right),$$

wobei (μ,ν) alle aus dem obigen System bildbaren $\frac{1}{2}(n^2-1)$ Indexpaare durchläuft.

n gerade, $n \geqq 2$

System der Indizes μ, ν

$$\left.\begin{aligned} &\mu = 1,2,\dots,\tfrac{n-2}{2}\,; \quad \nu = \pm 1, \pm 2,\dots,\pm\tfrac{n-2}{2} \\ &\mu = 0, \tfrac{n}{2}\,; \qquad\qquad \nu = 1,2,\dots,\tfrac{n-2}{2} \\ &\mu = 1,2,\dots,\tfrac{n-2}{2}\,; \quad \nu = 0, \tfrac{n}{2}\,. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Anzahl der hieraus}\\ \text{bildbaren Index-}\\ \text{paare } (\mu,\nu)\\ = \frac{n^2-4}{2}\end{array}$$

Dann besteht notwendig die Identität

$$\psi_n(u|\omega_1,\omega_2) = -\wp'(u)\cdot\frac{n}{2} \prod_{\mu,\nu} \left(\wp(u|\omega_1,\omega_2) - \wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n}\middle|\omega_1,\omega_2\right)\right)$$

wobei (μ,ν) alle aus dem obigen System bildbaren $\frac{1}{2}(n^2-4)$ Indexpaare durchläuft.

Alle in diesen beiden Identitäten auftretenden n-ten Teilwerte $\wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n}\middle|\omega_1,\omega_2\right)$ sind nach der Theorie der $\wp$-Funktion jeweils durchweg voneinander verschieden.

Die in diesen Formeln auftretenden komplexen Zahlen

$$\wp_{\mu\nu} := \wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n}\right) = \wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2\right)$$

$$\text{für } (\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2 \text{ mit } (\mu,\nu)\not\equiv(0,0) \bmod n$$

heißen die n-ten Teilwerte der Funktion $\wp(u|\omega_1,\omega_2)$. Ist überdies $\mathrm{ggT}(\mu,\nu,n)=1$, so heißt $\wp_{\mu\nu}$ ein primitiver n-ter Teilwert der Funktion $\wp(u|\omega_1,\omega_2)$

IV. Die Kleinsche Sigmafunktion und ihre n-ten Teilwerte

Die Kleinsche Sigmafunktion ist im Jahre 1885 von Felix Klein eingeführt und für die Theorie der elliptischen Kurven im komplexen projektiven Raum, unter Entwicklung des hierbei benötigten umfangreichen Formelapparates, nutzbar gemacht worden. In neuerer Zeit hat die Kleinsche Sigmafunktion auf zwanglose Weise auch in die Algebraische Zahlentheorie Eingang gefunden. Der historische Grund hiefür ist, daß diese Funktion erstmalig in Gestalt ihrer singulären Teilwerte in der Klassenzahlformel für die Strahlklassenkörper der komplexen Multiplikation aufgetreten ist und so den unmittelbaren Anlaß zur Bildung elliptischer Einheiten gegeben hat.

Die Kleinsche Sigmafunktion $\sigma^*(u|\mathfrak{w})$ unterscheidet sich von der Weierstraßschen Sigmafunktion $\sigma(u|\mathfrak{w})$ lediglich um einen einfachen, dennoch aber ganz wesentlichen exponentiellen Faktor.

Die Kleinsche Sigmafunktion $\sigma^*(u|\mathfrak{w})$ ist durch die folgende Formel definiert:

$$\sigma^*(u|\mathfrak{w}) = \sigma^*(u|\omega_1,\omega_2) = \sigma^*(u) :=$$

$$:= -e^{-\frac{uu^*}{2}} \cdot \sigma(u|\mathfrak{w})$$

mit $u = u_1\omega_1 + u_2\omega_2$, $u^* = u_1\eta_1 + u_2\eta_2$ (u_1, u_2 reell). Nun sind ω_1, ω_2 und η_1, η_2 kogrediente Variablenpaare. Daher kann $u^* = u^*(u|\omega_1,\omega_2)$ in invarianter Form als $u^* = u^*(u|\mathfrak{w})$ geschrieben werden. Somit ist die invariante Notation

$$\sigma^*(u|\mathfrak{w}) = -e^{-\frac{uu^*(u|\mathfrak{w})}{2}} \cdot \sigma(u|\mathfrak{w})$$

gerechtfertigt.

Ebenso wie die auf Seite 13 oben eingeführten $\wp$-Teilwerte sind auch die Teilwerte der Kleinschen Sigmafunktion in der Theorie und für die Anwendungen in der Algebra und Zahlentheorie von der allergrößten Bedeutung. Ihre Erklärung erfolgt nach demselben dort vorgezeichneten Muster. Es werde irgendeine natürliche Zahl $n \geqq 2$ fest vorgegeben. Dann heißen die komplexen Zahlen

$$\sigma_{gh}^{(n)} = \sigma_{gh} := \sigma^*\left(\frac{g\omega_1 + h\omega_2}{n}\right) = \sigma^*\left(\frac{g\omega_1 + h\omega_2}{n}\middle|\omega_1,\omega_2\right) =$$

$$= -e^{-\frac{(g\omega_1 + h\omega_2)(g\eta_1 + h\eta_2)}{2n^2}} \cdot \sigma\left(\frac{g\omega_1 + h\omega_2}{n}\middle|\omega_1,\omega_2\right)$$

für $(g,h) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(g,h) \not\equiv (0,0) \bmod n$

die n-ten Teilwerte der Funktion $\sigma^*(u|\mathfrak{w}) = \sigma^*(u|\omega_1,\omega_2)$. Ist überdies $\operatorname{ggT}(g,h,n) = 1$, so heißt $\sigma_{gh} = \sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2)$ ein primitiver n-ter Teilwert der Funktion $\sigma^*(u|\omega_1,\omega_2)$.

Diese σ_{gh} werden genauer auch als Kleinsche Sigmateilwerte bezeichnet, obwohl das Zeichen hierfür nicht ganz folgerichtig gewählt ist. Ferner sei bemerkt, daß stets

$$\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2) \neq 0 \quad \text{für } (g,h) \not\equiv (0,0) \bmod n$$

ist, während stets

$$\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2) = 0 \quad \text{für } (g,h) \equiv (0,0) \bmod n$$

und somit ohne Interesse ist.

Für die Kleinschen Sigmateilwerte $\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2)$ gibt es eine Vielzahl von Regeln und Formeln, von denen einige, die für die späteren Anwendungen von Bedeutung sind, hier nachstehend mitgeteilt werden sollen.

Zunächst gilt die triviale Regel:

$$\sigma_{-g,-h}(\omega_1,\omega_2) = -\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2) \, .$$

Viel wichtiger ist die Beantwortung der Frage, wieweit es auf das Indexpaar (g,h) modulo n ankommt. Diese Frage wird durch die folgende Formel vollständig beantwortet:

$$\sigma_{g+an,\,h+bn}(\omega_1,\omega_2) =$$

$$= (-1)^{a+b+ab} \cdot e^{\pm\frac{2\pi i}{2n}(gb-ha)} \cdot \sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2) \, ,$$

wobei das Vorzeichen $\pm$ im Exponenten der Orientierung von $\{\omega_1,\omega_2\}$ entspricht. Es tritt also bei der Reduktion von (g,h) modulo n eine (von ω_1,ω_2 unabhängige) $(2n)$-te Einheitswurzel vor. Danach genügt es, bei der Untersuchung der σ_{gh} die Indizes g und h jeweils auf die ganzen Zahlen $0,1,\dots,n-1$ zu beschränken.

Aus den zuletzt angegebenen beiden Formeln ergibt sich schließlich noch die weitere Formel

$$\sigma_{n-g,n-h} = e^{\pm\frac{2\pi i}{n}(h-g)} \cdot \sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2) ,$$

die eine weitere Reduktion der zu betrachtenden $\sigma_{g,h}$ ermöglicht. So sind beispielsweise bei ungeradem n nur $\frac{n^2-1}{2}$ Teilwerte $\sigma_{g,h}$ zu untersuchen, wie das System der Indizes g, h auf Seite 12 zeigt.

Alle bisher mitgeteilten Formeln für die Kleinschen Sigmateilwerte sind von globaler Art, indem sie letzten Endes auf den globalen Definitionsformeln von σ und ζ beruhen. Ihnen treten lokale Formeln an die Seite, die bekanntlich in der gesamten Theorie von der allergrößten Bedeutung sind. Für die hier verfolgten Zwecke benötigt man vor allem die $z-q$-Entwicklung für die Weierstraßsche σ-Funktion. Setzt man die Gitterbasis $\{\omega_1, \omega_2\}$ von w als positiv orientiert voraus — dies ist gleichbedeutend mit $\operatorname{Im} \omega > 0$ für $\omega := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ —, so lautet diese Formel für $\sigma(u|\omega_1, \omega_2)$ folgendermaßen:

$$\sigma(u|\omega_1, \omega_2) = -\frac{\omega_2}{2\pi i} e^{\frac{\eta_2}{2} \cdot \frac{u^2}{\omega_2}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\prod_{m=0}^{\infty}(1-zq^m)\prod_{m=1}^{\infty}(1-z^{-1}q^m)}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^2}$$

mit $z := e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}$, $q := e^{2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}} = e^{2\pi i \omega}$,

$$|q| < 1 .$$

Vermöge der Legendreschen Relation auf Seite 6 ergibt sich dann für die Kleinsche Funktion hieraus die entsprechende Entwicklung

$$\sigma^*(u|\omega_1,\omega_2) = \sigma^*(u_1\omega_1+u_2\omega_2|\omega_1,\omega_2) =$$

$$= \frac{\omega_2}{2\pi i} e^{\pi i u_2(u_1-1)} e^{\pi i u_1(u_1-1)\omega} \cdot$$

$$\cdot \frac{\prod\limits_{m=0}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i u_2} e^{2\pi i(m+u_1)\omega}\right)\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-2\pi i u_2} e^{2\pi i(m-u_1)\omega}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m\omega}\right)^2}$$

Hieraus wiederum erhält man unter Beachtung früherer Formeln für die <u>normierte</u> Kleinsche Sigmafunktion $\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)}\cdot\sigma^*(u|\omega_1,\omega_2)$ die fundamentale Entwicklung:

$$\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)}\cdot\sigma^*(u|\omega_1,\omega_2) =$$

$$= \frac{1}{i} e^{\pi i u_2(u_1-1)} e^{\pi i B_2(u_1)\omega} \cdot$$

$$\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i u_2} e^{2\pi i(m+u_1)\omega}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-2\pi i u_2} e^{2\pi i(m-u_1)\omega}\right),$$

wo allgemein

$$B_2(x) := x^2 - x + \frac{1}{6}$$

das <u>zweite Bernoullische Polynom</u> bezeichnet.

Es sei nun $(g,h)\in\mathbb{Z}^2$ ein gemäß

$$0\leq g<n\,,\;0\leq h<n$$

normiertes Paar ganzer rationaler Zahlen, wobei das Paar $(0,0)$ ausgeschlossen sei. Dann besteht, wie auf Seite 17 angegeben, für die n-ten Sigmateilwerte $\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2)$ die q-Entwicklung

$$\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\omega_2}{2\pi i}e^{\frac{2\pi i h(g-n)}{2n^2}}\cdot e^{\frac{2\pi i g(g-n)}{2n^2}\omega}\cdot$$

$$\cdot\frac{\prod\limits_{m=0}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2\pi i h}{n}}q^{m+\frac{g}{n}}\right)\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{2\pi i h}{n}}q^{m-\frac{g}{n}}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)^2}\,.$$

Entsprechend besteht, wie ebenfalls auf Seite 17 allgemein angegeben, für die <u>normierten</u> n-ten Teilwerte $\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)}\cdot\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2)$ die q-Entwicklung:

$$\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)}\cdot\sigma_{gh}(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\frac{1}{i}e^{\frac{2\pi i h(g-n)}{2n^2}}\cdot e^{\pi i B_2\left(\frac{g}{n}\right)\omega}\cdot$$

$$\cdot\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2\pi i h}{n}}q^{m+\frac{g}{n}}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{2\pi i h}{n}}q^{m-\frac{g}{n}}\right).$$

V. Die Berechnung der Diskriminante der n-ten Teilwerte der Weierstraßschen $\wp$-Funktion

Zugrunde gelegt für diese Berechnung wird die auf Seite 3 angegebene allgemeine Formel

$$D(f(x)) = a_0^{2m-2} \prod_{\mu>\lambda}^{1,m} (\xi_\mu - \xi_\lambda)^2 .$$

Im vorliegenden Falle ist nun gemäß den Angaben auf Seite 12:

$$f(x) = n \prod_{\mu,\nu} \left(x - \wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n} \middle| \omega_1,\omega_2\right)\right) \in \mathbb{Q}[g_2,g_3][x]$$

mit $x = \wp(u|\omega_1,\omega_2)$, $m = \frac{1}{2}(n^2-1)$,
falls $n \geq 3$, n ungerade.

$$f(x) = \frac{n}{2} \prod_{\mu,\nu} \left(x - \wp\left(\frac{\mu\omega_1+\nu\omega_2}{n} \middle| \omega_1,\omega_2\right)\right) \in \mathbb{Q}[g_2,g_3][x]$$

mit $x = \wp(u|\omega_1,\omega_2)$, $m = \frac{1}{2}(n^2-4)$,
falls $n \geq 4$, n gerade.

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 =$$

$$= 4\left(x - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(x - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\left(x - \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right) \in \mathbb{Q}[g_2,g_3][x],$$

mit $x = \wp(u|\omega_1,\omega_2)$, $m = 3$
für $n = 2$.

Im letzten Falle $n = 2$ ist, wie bekannt,

$$\wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp'\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \wp'\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = 0$$

und damit vermöge der Differentialgleichung

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

$$f\left(\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right) = f\left(\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right) = f\left(\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right) = 0 .$$

Bemerkung zur Schreibweise $\mathbb{Q}[g_2, g_3]$:

Der wichtige Umkehrsatz in der Theorie der elliptischen Funktionen lautet:

Satz: Es seien a und b irgendzwei komplexe Zahlen mit der Eigenschaft $a^3 - 27b^2 \neq 0$. Dann gibt es hierzu genau ein Gitter $\mathfrak{w}$, wofür

$$g_2(\mathfrak{w}) = a \quad \text{und} \quad g_3(\mathfrak{w}) = b$$

ist.

Hiernach können g_2 und g_3 als komplexe unabhängige Variable und somit in algebraischer Ausdrucksweise als unabhängige Unbestimmte aufgefaßt werden. Es ist dann also $\mathbb{Q}[g_2, g_3]$ der Polynomring in den beiden Unbestimmten g_2, g_3 über dem rationalen Zahlkörper $\mathbb{Q}$.

Im folgenden soll nun nur der Fall eines ungeraden n in Hinblick auf die Diskriminantenberechnung genauer skizziert werden.

n ungerade, $n \geq 3$

Nach den Angaben auf Seite 19 hat man hier zunächst die Diskriminantenformel

$$D(f(x)) = n^{n^2-3} \prod_{g,h;\, g',h'} \left(\wp\left(\frac{g\omega_1 + h\omega_2}{n}\right) - \wp\left(\frac{g'\omega_1 + h'\omega_2}{n}\right) \right)^2,$$

wobei das Produkt aus $\binom{\frac{1}{2}(n^2-1)}{2} = \frac{1}{8}(n^2-1)(n^2-3)$ quadratischen, von Null verschiedenen Faktoren besteht. Es ist also gewiß $D(f(x)) \neq 0$.

Bemerkung: Die früher auf Seite 12 mit μ, ν bezeichneten Indizes sind hier stattdessen aus einem bald ersichtlich werdenden Grund mit g, h (g', h') bezeichnet worden.

Die nunmehr vorzunehmende Umformung des Produkte

$$\prod_{g,h;g',h'} \left(\wp\left(\frac{g\omega_1+h\omega_2}{n}\right)-\wp\left(\frac{g'\omega_1+h'\omega_2}{n}\right)\right)^2$$

beruht entscheidend auf der fundamentalen Formel

$$\wp(u)-\wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)},$$

die sich mittels der Kleinschen Sigmafunktion auch in der Form

$$\wp(u)-\wp(v) = -\frac{\sigma^*(u+v)\cdot\sigma^*(u-v)}{\sigma^{*2}(u)\cdot\sigma^{*2}(v)}$$

darstellen läßt. Für die n-ten Teilwerte ergibt sich hiermit die spezielle Formel

$$\wp_{gh}-\wp_{g'h'} = -\frac{\sigma_{g+g',h+h'}\cdot\sigma_{g-g',h-h'}}{\sigma^2_{gh}\cdot\sigma^2_{g'h'}}.$$

Damit erhält man endlich die rein multiplikative Darstellung des obigen Produktes:

$$\prod_{g,h;g',h'}\left(\wp_{gh}-\wp_{g'h'}\right)^2 =$$

$$=\prod_{g,h;g',h'}\left(\frac{\sigma_{g+g',h+h'}\cdot\sigma_{g-g',h-h'}}{\sigma^2_{gh}\cdot\sigma^2_{g'h'}}\right)^2,$$

wobei nun für die Auswertung dieses letzten Produktes seine Zerlegung in passende Teilprodukte von ausschlaggebender Bedeutung ist. Außerdem sind aus der allgemeinen Theorie wohlbekannte Normierungen in dieser letzten Formel vorzunehmen.

Offenbar entsteht durch passende Normierung aus der ursprünglichen die normierte Formel

$$\frac{\wp_{g,h}}{\sqrt[6]{\Delta}} - \frac{\wp_{g',h'}}{\sqrt[6]{\Delta}} = - \frac{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g+g',h+h'}\right)\cdot\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g-g',h-h'}\right)}{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g,h}\right)^2\cdot\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g',h'}\right)^2}\,.$$

Damit erhält man die normierte rein multiplikative Darstellung des zu untersuchenden Produktes:

$$\prod_{g,h;g',h'}\left(\frac{\wp_{g,h}}{\sqrt[6]{\Delta}} - \frac{\wp_{g',h'}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2 =$$

$$= \prod_{g,h;g',h'}\left(\frac{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g+g',h+h'}\right)\cdot\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g-g',h-h'}\right)}{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g,h}\right)^2\cdot\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{g',h'}\right)^2}\right)^2 .$$

Die Zerlegung dieses letzteren Produktes in passende Teilprodukte beruht naturgemäß auf dem System der Indizes, welchem die Paare $g,h\,;\,g',h'$ zu entnehmen sind. Ein solches System der Indizes ist (für ungerades $n \geq 3$) auf Seite 12 explizit angegeben worden. Danach ergeben sich die nachstehenden passenden Teilsysteme für die Indizes $g,h\,;\,g',h'$:

I_a: $g,g' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$ mit $g'<g$; $h,h' \in \{1,\dots,n-1\}$.

I_b: $g=g' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$; $h,h' \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $h'<h$.

II: $g=g'=0$; $h,h' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$ mit $h'<h$.

III: $g,g' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$ mit $g'<g$; $h=h'=0$.

IV: $g \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$, $g'=0$; $h \in \{1,\dots,n-1\}$, $h' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$.

V: $g,g' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$; $h \in \{1,\dots,n-1\}$, $h'=0$.

VI: $g \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$, $g'=0$; $h=0$, $h' \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$.

Die hieraus resultierenden Teilprodukte lassen sich nun, was nicht voraussehbar ist, sämtlich durch die Dedekindsche η-Funktion ausdrücken.

Teilprodukte

$$\mathrm{I}_a:\ \prod_{\substack{g,g'\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}\\ g'<g\\ h,h'\in\{1,\dots\dots,n-1\}}}\left(\frac{\wp_{gh}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{g'h'}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=\frac{\eta(n\omega)^{n(n-3)}\,\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)^{(2n-1)\cdot(n-3)}}{\eta(\omega)^{(3n-1)\cdot(n-3)}}$$

$$\mathrm{I}_b:\ \prod_{\substack{g\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\},\ g=g'\\ h,h'\in\{1,\dots\dots,n-1\}\\ h'<h}}\left(\frac{\wp_{gh}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{gh'}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot\frac{\eta(n\omega)^{n^2-3}\cdot\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)^{4n\dots}}{\eta(\omega)^{n^2+4n-9}}$$

$$\mathrm{II}:\ \prod_{\substack{g=g'=0\\ h,h'\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}\\ h'<h}}\left(\frac{\wp_{0h}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{0h'}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=n^{-\frac{n-3}{2}}\cdot\left(\frac{\eta(\omega)}{\eta(n\omega)}\right)^{n-3},$$

$$\mathrm{III}:\ \prod_{\substack{g,g'\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}\\ g'<g\\ h=h'=0}}\left(\frac{\wp_{g0}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{g'0}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=\left(\frac{\eta(\omega)}{\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)}\right)^{n-3},$$

$$\mathrm{IV}:\ \prod_{\substack{g\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\},\ g'=0\\ h\in\{1,\dots\dots,n-1\},\ h'\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}}}\left(\frac{\wp_{gh}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{0h'}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=n^{-(n-1)^2}\cdot\frac{\eta(\omega)^{2n(n-3)}\cdot\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)^{2n}}{\eta(n\omega)^{2n(n-2)}},$$

$$\mathrm{V}:\ \prod_{\substack{g,g'\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}\\ h\in\{1,\dots\dots,n-1\},\ h'=0}}\left(\frac{\wp_{gh}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{g'0}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=n^{n-1}\cdot\frac{\eta(\omega)^{2n(n-3)}\cdot\eta(n\omega)^{2n}}{\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)^{2n(n-2)}},$$

$$\mathrm{VI}:\ \prod_{\substack{g\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\},\ g'=0\\ h=0,\ h'\in\{1,\dots,\frac{n-1}{2}\}}}\left(\frac{\wp_{g0}}{\sqrt[6]{\Delta}}-\frac{\wp_{0h'}}{\sqrt[6]{\Delta}}\right)^2=n^{-(n-1)}\cdot\frac{\eta(\omega)^{4n}}{\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)^{2n}\eta(n\omega)^{2n}}.$$

Die mit # bezeichnete Anzahl der in diesen 7 Teilprodukte auftretenden quadratischen Faktoren berechnet sich dabei jeweils folgendermaßen:

$$\#(\mathrm{I}_a) = \frac{1}{8}(n-3)(n-1)\cdot(n-1)^2 = \frac{1}{8}(n-3)\cdot(n-1)^3,$$

$$\#(\mathrm{I}_b) = \frac{1}{2}(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1) = \frac{1}{4}(n-2)\cdot(n-1)^2,$$

$$\#(\mathrm{II}) = \frac{1}{8}(n-1)\cdot(n-3),$$

$$\#(\mathrm{III}) = \frac{1}{8}(n-1)\cdot(n-3),$$

$$\#(\mathrm{IV}) = \frac{1}{2}(n-1)^2\cdot\frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{4}(n-1)^3,$$

$$\#(\mathrm{V}) = \frac{1}{2}(n-1)^2\cdot\frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{4}(n-1)^3,$$

$$\#(\mathrm{VI}) = \frac{1}{2}(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{4}(n-1)^2.$$

Die gesamte Summe aller dieser Anzahlen # berechnet sich hiernach zu

$$\frac{1}{8}(n-3)\cdot(n-1)^3 + \frac{1}{4}(n-2)\cdot(n-1)^2 + \frac{1}{4}(n-1)\cdot(n-3) + \frac{1}{2}(n-1)^3 + \frac{1}{4}(n-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}(n-1)(n^3+n^2-3n-3) =$$

$$= \frac{1}{8}(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2-3) = \frac{1}{8}(n^2-1)\cdot(n^2-3) =$$

$$= \binom{\frac{1}{2}(n^2-1)}{2},$$

wie es bei der Diskriminantenformel auf Seite 20 bemerkt worden ist.

Setzt man nun die 7 Teilprodukte $I_a, I_b, II, III, IV, V, VI$ auf Seite 23 zum Gesamtprodukt zusammen, so fallen, wie man überraschenderweise feststellt, sämtliche η-Funktionen $\eta(\omega)$, $\eta(n\omega)$, $\eta\left(\frac{\omega}{n}\right)$ bei der Rechnung heraus. So ergibt sich die einfache, aber fundamentale Formel:

$$\prod_{g,h\,;\,g',h'} \left(\wp\left(\frac{g\omega_1+h\omega_2}{n}\right) - \wp\left(\frac{g'\omega_1+h'\omega_2}{n}\right)\right)^2 =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n^{-\frac{n^2-3}{2}} \cdot \Delta^{\frac{1}{6}\binom{\frac{1}{2}(n^2-1)}{2}\cdot 2} =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{n^2-3}{2}}} \cdot \Delta^{\frac{(n^2-1)\cdot(n^2-3)}{24}} .$$

Dabei ist der Exponent

$$\frac{1}{3}\binom{\frac{1}{2}(n^2-1)}{2} = \frac{(n^2-1)\cdot(n^2-3)}{24} = \frac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2-3)}{8\cdot 3} \in \mathbb{N}$$

eine natürliche, gerade Zahl; denn $n \geq 3$ ist ungerade.

Beachte: Nach Erklärung ist $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$.

Auf Grund der obigen Formel ist damit auch die Diskriminante des Polynoms $f(x)$ auf Seite 19/20 explizit bestimmt. Es gilt die Diskriminantenformel

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n^{\frac{n^2-3}{2}} \cdot \Delta^{\frac{(n^2-1)\cdot(n^2-3)}{24}}$$

Keine der auf Seite 23 zusammengestellten 7 Identitäten ist als einfach oder gar trivial zu bezeichnen, vielmehr handelt es sich dabei um tiefliegende mathematische Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen und der Modulfunktionen. Anschließend an diese Formeln sollen daher noch einige Ergänzungen beigefügt werden.

1. Im Falle eines singulären Gitters $[\alpha_1, \alpha_2]$, wo α_1, α_2 über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige Zahlen aus einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Ω sind, sind alle komplexen Zahlen der Form

$$\frac{\wp\left(\frac{g\alpha_1+h\alpha_2}{n}\middle|\alpha_1,\alpha_2\right)}{\sqrt[6]{\Delta(\alpha_1,\alpha_2)}}$$ algebraische Zahlen,

wie in der Theorie der Strahlklassenkörper über Ω gezeigt wird. Auf Grund der bewiesenen Identitäten sind dann auch alle 7 dort auftretenden η-Quotienten für das Argument

$$\omega = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \text{mit } \operatorname{Im}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$$

algebraische Zahlen.

2. Für den Beweis der 7 Identitäten benötigt man in Hinblick auf die q-Entwicklung für die normierten n-ten Teilwerte

$$\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)} \cdot \mathfrak{G}_{gh}(\omega_1,\omega_2)$$ (siehe Seite 18)

naturgemäß viele technische Hilfsmittel, von denen einige hier mitgeteilt werden sollen.

Formeln

Multiplikationstheorem:

$$B_2(mx) = m\sum_{\mu=0}^{m-1} B_2\left(x+\frac{\mu}{m}\right), \quad x\in\mathbb{R};\ m\in\mathbb{N}.$$

Für die periodische Fortsetzung $P_2(x) := B_2(x-[x])$ gilt entsprechend

$$P_2(mx) = m\sum_{\mu \bmod m} P_2\left(x+\frac{\mu}{m}\right).$$

P_2 ist eine gerade Funktion.

Ferner benötigt man bei der Durchführung der zahlreichen Rechnungen mehr oder weniger komplizierte Formeln, in denen Einheitswurzeln die dominierende Rolle spielen. Diese Formeln dienen vor allem zur algebraischen Umformung und damit zur Vereinfachung der ursprünglich auftretenden unendlichen Produkte.

Produktformeln:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}\nu}\cdot x\right)=\frac{1-x^{n}}{1-x} \quad \text{für } x\neq 1,$$

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}\nu}\right)=n,$$

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}\nu}\right)^{2}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{n^{2}-1}{8}}\cdot n,$$

$$\prod_{\kappa=1}^{n-2}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}\kappa}\right)^{2(n-1-\kappa)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot\frac{n^{2}-1}{8}}\cdot n^{n-2},$$

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1+e^{\frac{2\pi i}{n}\nu}\right)=e^{\frac{\pi i}{n}\cdot\frac{n^{2}-1}{8}}.$$

Von anderer Art ist ein Hilfssatz, der ebenfalls bei der vereinfachenden Umformung der unendlichen Produkte eine Rolle spielt.

Lemma: Es sei $n \geqq 5$ eine ungerade natürliche Zahl. Seien $g, g' \in \{1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}\}$ mit $g \neq g'$. Dann werden durch $g+g', |g-g'|, n-(g+g'), n-|g-g'|$ genau die Zahlen $1, 2, \ldots\ldots, n-2, n-1$ dargestellt, und zwar jeweils mit derselben Vielfachheit

$$n-3 \geqq 2.$$

Schließlich spielt noch die disjunkte Zerlegung der ganzen Zahlen in Restklassen nach dem Modul n eine oft benutzte Rolle.

n gerade, $n \geqq 2$

In diesem ebenfalls sehr komplizierten, technisch sehr aufwendigen Fall soll lediglich das fertige Endergebnis hier mitgeteilt werden.

$n = 2$

$$D(f(x)) = D(4x^3 - g_2 x - g_3) =$$

$$= 2^4 \cdot (g_2^3 - 27 g_3^2) = 16 \Delta .$$

Dieses Ergebnis erhält man unmittelbar, indem man die als Determinante definierte 5-reihige Resultante $R(f, f')$ aufschreibt und ausrechnet.

n gerade, $n \geqq 4$

$$\prod_{g,h;g',h'} \left(\frac{\wp_{gh}}{\sqrt[6]{\Delta}} - \frac{\wp_{g'h'}}{\sqrt[6]{\Delta}} \right)^2 = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} .$$

Die Anzahl der auf der linken Seite dieser Formel auftretenden quadratischen Faktoren ist gleich

$$\binom{\frac{1}{2}(n^2-4)}{2} = \frac{1}{8}(n^2-4)\cdot(n^2-6) .$$

Hieraus folgt die weitere Formel

$$\prod_{g,h;g',h'} \left(\wp_{gh} - \wp_{g'h'} \right)^2 = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} \cdot \Delta^{\frac{(n^2-4)(n^2-6)}{24}} .$$

Hierbei ist der Exponent

$$\frac{(n^2-4)\cdot(n^2-6)}{24} = \frac{(n-2)\cdot(n+2)\cdot(n^2-6)}{8\cdot 3} \in \mathbb{N}$$

eine (ungerade oder gerade) natürliche Zahl.

Damit ergibt sich schließlich die gesuchte

Diskriminantenformel

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2^4 \cdot n^{\frac{n^2}{2}-6} \cdot \Delta^{\frac{(n^2-4)\cdot(n^2-6)}{24}} ,$$

wobei die zweite der auf Seite 3 angegebenen allgemeinen Diskriminantenformeln (mit $a_0 = \frac{n}{2}$, $m = \frac{1}{2}(n^2-4)$) angewandt worden ist.

<u>Schlußbemerkung</u>: Die zuerst oben angegebene Formel ist durch die <u>zweckmäßige Unterteilung</u> des auf Seite 12 angegebenen Systems der Indizes (μ, ν) für gerades n in <u>11 verschiedene Systeme</u> für die $g,h;g',h'$ (11 Teilprodukte !!) <u>hergeleitet</u> worden.

VI. Die Berechnung der Diskriminante der primitiven n-ten Teilwerte der Weierstraßschen $\wp$-Funktion

Es sei $\mathfrak{w}$ ein komplexes Gitter, in Basisgestalt gegeben durch $\mathfrak{w} = [\omega_1, \omega_2]$. Dann heißt der komplexe Bruch

$$\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n > 1 \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}$$

<u>kürzbar</u>, wenn $ggT(a, b, n) > 1$ ist,
<u>unkürzbar</u>, wenn $ggT(a, b, n) = 1$ ist.

Dementsprechend heißt ein n-ter $\wp$-Teilwert $\wp_{\mu\nu} := \wp\left(\frac{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}{n} \middle| \omega_1, \omega_2\right)$ <u>imprimitiv</u>, wenn $ggT(\mu, \nu, n) > 1$, dagegen <u>primitiv</u>, wenn $ggT(\mu, \nu, n) = 1$ ist.

Da es bei diesen $\wp$-Teilwerten $\wp_{\mu\nu}$ wegen der doppelten Periodizität auf μ und ν jeweils nur bis auf ganze Vielfache von n, d.h. <u>modulo n</u> ankommt, wird man auf die folgende <u>Fragestellung</u> geführt.

Wieviele Restklassenpaare (a, b) modulo n gibt es, für die der eindeutig bestimmte größte gemeinsame Teiler

$$ggT(a, b, n) = 1 \quad , n > 1,$$

ist.

Solche Restklassenpaare (a, b) modulo n heißen <u>primitiv</u>, im gegenteiligen Fall <u>imprimitiv</u>.

Die <u>Anzahl der primitiven Restklassenpaare modulo n</u> werde mit $\Phi(n)$ bezeichnet.

Gesucht ist dann eine <u>explizite Formel</u> für $\Phi(n)$.

Eine solche Formel erhält man folgendermaßen. Offenbar ist die Anzahl aller (primitiven und imprimitiven) Restklassenpaare modulo n gleich n^2. In völliger formaler Analogie zur Herleitung der Formel für die Eulersche φ-Funktion hat man hier von der offensichtlich gültigen Gleichung

$$\sum_{t|n} \Phi\left(\frac{n}{t}\right) = \sum_{t|n} \Phi(t) = n^2$$

auszugehen. Hieraus ergibt sich durch Anwendung der Möbiusschen Umkehrformel auf diese Gleichung die gesuchte Formel

$$\Phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n^2}{d^2} = n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Anmerkung: Diese Formel (und ihre Verallgemeinerung auf k-Tupel) ist zuerst von Camille Jordan (1838–1922) in seinem Buche "Traité des substitutions" (1870), pp. 95–97, angegeben worden.

Die Möbiussche Umkehrformel für Summen und für Produkte wird auch im weiteren Verlauf der Untersuchungen eine grundlegende Rolle spielen.

Das anschließend zu lösende Hauptproblem besteht zunächst darin, explizit ein Polynom anzugeben, dessen Nullstellen genau die sämtlichen paarweise verschiedenen primitiven n-ten $\wp$-Teilwerte sind. Dabei wird wieder die Möbiussche Umkehrformel, und zwar für Produkte, eine wichtige Rolle spielen.

n ungerade > 1

Man bilde das normierte Polynom vom Grade $\frac{1}{2}(n^2-1)$

$$\frac{f(x)}{n} =: f_n(x) = \prod_{\kappa,\lambda} (x - \wp_{\kappa\lambda}), \quad x = \wp(u|\omega_1,\omega_2).$$

Seine Wurzeln sind die primitiven und die imprimitiven, paarweise verschiedenen, sämtlichen n-ten $\wp$-Teilwerte. Ihre Anzahl ist gleich $\frac{1}{2}(n^2-1)$.

Beachte hierzu: $\wp_{n-\kappa,\, n-\lambda} = \wp_{\kappa\lambda}$.

Hieraus ist nunmehr, wie im Falle des Kreisteilungspolynoms, dasjenige normierte Polynom $F_n(x)$ herzuleiten, welches genau die verschiedenen primitiven n-ten $\wp$-Teilwerte als Nullstellen besitzt. Unter Beachtung der Tatsache, daß $ggT(\kappa,\lambda,n) = ggT(n-\kappa, n-\lambda, n)$ ist, erkennt man, daß der Grad dieses Polynoms $F_n(x)$ gleich $\frac{1}{2}\Phi(n)$ sein muß. Die weitere Vorgehensweise entspricht nun genau derjenigen in der Kreisteilung. Mit der entsprechenden Überlegung ergibt sich hier die Polynomidentität

$$f_n(x) = \prod_{d|n} F_{\frac{n}{d}}(x), \quad F_1(x) := 1, \quad f_1(x) := 1.$$

Mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformel für Produkte erhält man hieraus die „umgekehrte" Polynomidentität

$$F_n(x) = \prod_{d|n} f_{\frac{n}{d}}(x)^{\mu(d)}, \quad n>1, \text{ ungerade}.$$

Aus der letzten Identität folgt sofort für den Grad von $F_n(x)$ die Formel

$$\text{Grad}\, F_n(x) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{d}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\Phi(n),$$

wie es sein muß. Dabei ist Summenformel

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{für } n > 1$$

benutzt worden.

Über dieses Polynom $F_n(x)$ vom Grade $\frac{1}{2}\Phi(n)$, welches das „Elliptische" Analogon zum n-ten Kreisteilungspolynom vom Grade $\varphi(n)$ ist, kann unter anderm folgendes ausgesagt werden:

<u>Satz</u>: Das normierte Polynom $F_n(x)$ besitzt lauter Koeffizienten aus dem Ring $\mathbb{Q}[g_2, g_3]$ und ist über diesem Ring $\mathbb{Q}[g_2, g_3]$ irreduzibel.

<u>Bemerkung</u>: Das Polynom $F_n(x)$ ist sogar über dem Erweiterungsring $\mathbb{C}[g_2, g_3]$ irreduzibel.

Auf Grund der Definition von $\mu(d)$ ergibt sich nunmehr für das Polynom $F_n(x) \in \mathbb{Q}[g_2, g_3][x]$ die endgültige Darstellung:

$$F_n(x) = \frac{f_n(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2}}(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}}(x) \cdots\cdots}{\prod f_{\frac{n}{p_1}}(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}}(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}}(x) \cdots\cdots}.$$

Hierbei ist die natürliche (ungerade) Zahl $n > 1$ in ihrer <u>kanonischen Primzerlegung</u>

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots\cdots p_s^{\alpha_s}$$

angesetzt worden.

Weitere Erklärung der Formel für $F_n(x)$:

In dieser Formel bezeichnet allgemein $\prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\sigma}}(x)$ das Produkt derjenigen Faktoren, welche aus dem Ausdruck $f_{\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_\sigma}}}(x)$ dadurch hervorgehen, indem man an die Stelle der Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_\sigma$ der Reihe nach die σ-gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung von $1, 2, 3, \ldots, s$ setzt.

Aus der Quotientendarstellung von $F_n(x)$ ergibt sich nun die der weiteren Rechnung zugrunde zu legende polynomische Formel

$$F_n(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1}}(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}}(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}}(x) \cdots\cdots =$$

$$= f_n(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2}}(x) \cdot \prod f_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}}(x) \cdots\cdots .$$

Hieraus folgt durch Differentiation eine Formel der Gestalt

$$F_n'(x) \cdot \{\prod \cdots\} + F_n(x) \cdot \{\prod \cdots\}' =$$

$$= f_n'(x) \cdot \{\prod \cdots\} + f_n(x) \cdot \{\prod \cdots\}' .$$

Hierin ist nun $x = \wp(u|w) = \wp(u|\omega_1, \omega_2) = \wp(u)$ einzutragen. Dazu beachte man die Formeln

$$F_n'(x) = \frac{dF_n(\wp(u))}{du} \cdot \frac{1}{\wp'(u)}, \quad f_n'(x) = \frac{df_n(\wp(u))}{du} \cdot \frac{1}{\wp'(u)}$$

Bemerkung: Das Polynom $f_n(x)$ hat sämtliche $\frac{1}{2}(n^2-1)$ paarweise verschiedenen n-ten $\wp$-Teilwerte als Wurzeln.

Das Polynom $F_n(x)$ hat sämtliche $\frac{1}{2}\Phi(n)$ paarweise verschiedenen primitiven n-ten $\wp$-Teilwerte als Wurzeln.

In der auf Seite 34 angegebenen Differentiationsformel werde nunmehr das spezielle Argument

$$x = \wp\left(\frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2\right) =: \wp_{\kappa\lambda}$$

eingetragen, wobei $\wp_{\kappa\lambda}$ mit $ggT(\kappa,\lambda,n)=1$ ein primitiver n-ter $\wp$-Teilwert ist. Hierfür ist

$$F_n(\wp_{\kappa\lambda}) = f_n(\wp_{\kappa\lambda}) = 0,$$

und man erhält die folgende Gleichung:

$$F_n'(\wp_{\kappa\lambda})\cdot\prod f_{\frac{n}{p_1}}(\wp_{\kappa\lambda})\cdot\prod f_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}(\wp_{\kappa\lambda})\cdot\prod f_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4p_5}}(\wp_{\kappa\lambda})\cdots\cdots =$$

$$= f_n'(\wp_{\kappa\lambda})\cdot\prod f_{\frac{n}{p_1p_2}}(\wp_{\kappa\lambda})\cdot\prod f_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}}(\wp_{\kappa\lambda})\cdot \prod f_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4p_5p_6}}(\wp_{\kappa\lambda})\cdots\cdots .$$

Nun ist auf Grund der ersten Diskriminantenformel auf Seite 3

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda\\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} F_n'(\wp_{\kappa\lambda}) = (-1)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi(n)}{2}\cdot\left(\frac{\Phi(n)}{2}-1\right)}\cdot D(F_n(x)) = D(F_n(x));$$

denn $\Phi(n) = n^2\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \equiv 0 \mod 8$,

da $p^2-1\equiv 0 \mod 8$ für $p\mid n$, n ungerade, $n>1$.

Auf Grund der obenstehenden Gleichung kommt es dann für die Bestimmung der Diskrimenante $D(F_n(x))$ auf die explizite Berechnung der folgenden Produkte an:

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda\\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f_n'(\wp_{\kappa\lambda});\ \prod_{\substack{\kappa,\lambda\\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f_{\frac{n}{p_1}}(\wp_{\kappa\lambda}),\ldots;\ \prod_{\substack{\kappa,\lambda\\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f_{\frac{n}{p_1p_2}}(\wp_{\kappa\lambda}),\ldots\ldots.$$

Zunächst soll das Produkt $\prod\limits_{\substack{\kappa,\lambda \\ \mathrm{ggT}(\kappa,\lambda,n)=1}} f_n'(\wp_{\kappa\lambda})$ explizit berechnet werden.

Dies ist eine <u>sehr</u> schwierige Aufgabe!

Ausgegangen wird von der Tatsache, daß das <u>volle Produkt</u> die Diskriminante des normierten Polynoms $f_n(x) \in \mathbb{Q}[g_2, g_3][x]$ vom Grade $\frac{1}{2}(n^2-1)$ ist:

$$\prod_{\kappa,\lambda} f_n'(\wp_{\kappa\lambda}) = D(f_n(x)) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{n^2-3}{2}}} \cdot \Delta^{\frac{(n^2-1)(n^2-3)}{24}},$$

wie auf Seite 25 angegeben.

<u>Beachte</u>: Wegen $a_0 = 1$, $\frac{1}{2}(n^2-1) \equiv 0 \bmod 4$ kann ohne weiteres die erste der beiden allgemeinen Formeln auf Seite 3 zur Berechnung von $D(f_n(x))$ genommen werden.

Auf die vorstehende Formel gestützt, kann dann unter dem Einsatz beträchtlicher Hilfsmittel, die eigens zu entwickeln sind, das <u>eingeschränkte Produkt</u>

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda \\ \mathrm{ggT}(\kappa,\lambda,n)=1}} f_n'(\wp_{\kappa\lambda})$$

explizit berechnet werden.

Zu den <u>Hilfsmitteln</u> gehören unter anderm:
Summen- und Produktformeln, Inversionsformeln (Möbius) und Verallgemeinerungen auf doppelte Summen- und Produktbildungen (in Hinblick auf elliptische Funktionen); die <u>Mangoldtsche Funktion</u> Λ, definiert durch $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{für } n = p^\nu, \nu \geqq 1 \text{ (p Primzahl)} \\ 0 & \text{für } n \neq p^\nu, \nu \geqq 1 \end{cases}$.

Am wichtigsten ist jedoch die Formel

$$\wp'_{gh} = \frac{\sigma_{2g,2h}}{\sigma^4_{gh}},$$

die aus der Weierstraßschen Formel

$$\wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)} = \frac{\sigma^*(2u)}{\sigma^{*4}(u)}$$

durch Spezialisierung entsteht.
Nach umfangreichen Rechnungen ergibt sich dann die folgende

Endformel

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda \\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f'_n\left(\wp\left(\frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{n}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)}}{p^{\frac{n^2-3}{2}}} \cdot \Delta^{\frac{(n^2-3)\cdot\Phi(n)}{24}} = \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{p^{2\nu}-3}{2}}} \cdot \Delta^{\frac{(p^{2\nu}-3)\cdot p^{2(\nu-1)}(p^2-1)}{24}} \\ \qquad \text{für } n = p^\nu,\ \nu \geq 1 \ (p \text{ ungerade Primzahl}), \\ \Delta^{\frac{(n^2-3)\cdot\Phi(n)}{24}} \quad \text{für } n \neq p^\nu,\ \nu \geq 1 . \end{cases}$$

In dieser Formel ist der bei Δ auftretende Exponent

$$\frac{(n^2-3)\cdot\Phi(n)}{24}$$

in jedem Falle eine <u>natürliche Zahl</u>.

Für die Berechnung der Produkte

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda \\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f_{\frac{n}{p_1}}(\wp_{\kappa\lambda}),\dots;\prod_{\substack{\kappa,\lambda \\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f_{\frac{n}{p_1 p_2}}(\wp_{\kappa\lambda}),\dots\dots\dots$$

kommt es offenbar auf die genauere Untersuchung eines Produktes der Form

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda \\ ggT(\kappa,\lambda,n)=1}} f_{\frac{n}{d}}(\wp_{\kappa\lambda})$$ für ungerades $n>1$ und einen Teiler $d|n$ mit $d\neq 1$

an. Es sei ausdrücklich daran erinnert, daß die Indexpaare (κ,λ), über welche dieses Produkt zu erstrecken ist, aus dem auf Seite 12 angegebenen System zu entnehmen sind, allerdings mit der zusätzlichen Forderung $ggT(\kappa,\lambda,n)=1$.

Für die Lösung des anstehenden Problems gehe man aus von der elliptischen Funktion

$$\Psi_{\frac{n}{d}}(u|\mathfrak{w}):=\frac{\sigma\left(\frac{n}{d}u|\mathfrak{w}\right)}{\sigma^{\left(\frac{n}{d}\right)^2}(u|\mathfrak{w})}=\frac{\sigma^*\left(\frac{n}{d}u|\mathfrak{w}\right)}{\sigma^{*\left(\frac{n}{d}\right)^2}(u|\mathfrak{w})}=$$

$$=\left(\sqrt[12]{\Delta}\right)^{\left(\frac{n}{d}\right)^2-1}\cdot\frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma^*\left(\frac{n}{d}u|\mathfrak{w}\right)}{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma^*(u|\mathfrak{w})\right)^{\left(\frac{n}{d}\right)^2}}\,.$$

Andererseits ist, wie auf Seite 12 angegeben,

$$\Psi_{\frac{n}{d}}(u|\mathfrak{w})=\frac{n}{d}\cdot\prod_{\alpha,\beta}\left(\wp(u|\omega_1,\omega_2)-\wp\left(\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{n/d}\Big|\omega_1,\omega_2\right)\right)$$

in diesem Produkt sind, wie wieder auf Seite 12 (für n) angegeben, $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{d}\right)^2-1\right)$ Faktoren enthalten.

Laut Definition auf Seite 32 ist somit

$$f_{\frac{n}{d}}(x) = \frac{1}{n/d}\psi_{\frac{n}{d}}(u|\omega_1,\omega_2) = \prod_{\alpha,\beta_2}\left(x - \wp\left(\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{n/d}\Big|\omega_1,\omega_2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n/d}\cdot\left(\sqrt[12]{\Delta}\right)^{\left(\frac{n}{d}\right)^2-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma^*\left(\frac{n}{d}u|\omega_1,\omega_2\right)}{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma^*(u|\omega_1,\omega_2)\right)^{\left(\frac{n}{d}\right)^2}}$$

$$\text{mit } x = \wp(u|\omega_1,\omega_2)$$

Danach ist speziell für $u = \frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{n}$ mit $ggT(\kappa,\lambda,n)=1$

$$\wp(u|\omega_1,\omega_2) = \wp\left(\frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{n}\Big|\omega_1,\omega_2\right) = \wp_{\kappa\lambda} \text{ mit } ggT(\kappa,\lambda,n)=1:$$

$$f_{\frac{n}{d}}(\wp_{\kappa\lambda}) = \frac{1}{n/d}\cdot\left(\sqrt[12]{\Delta}\right)^{\left(\frac{n}{d}\right)^2-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma^*\left(\frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{d}\Big|\omega_1,\omega_2\right)}{\left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma^*\left(\frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{n}\Big|\omega_1,\omega_2\right)\right)^{\left(\frac{n}{d}\right)^2}}$$

$$\text{mit } ggT(\kappa,\lambda,n) = 1 \Longrightarrow ggT(\kappa,\lambda,d) = 1\,!$$

Hierüber ist nun das Produkt zu bilden, und zwar über alle Indexpaare (κ,λ), welche aus dem auf Seite 12 angegebenen System unter der zusätzlichen Forderung

$$ggT(\kappa,\lambda,n) = 1$$

gebildet werden können.

Das bei der Produktbildung entstehende Nennerprodukt ist wegen der „richtigen" Indexpaare (κ,λ) ohne zusätzliche Mühe geschlossen auswertbar. Es gilt die tiefliegende **Formel**:

$$\prod_{\substack{\kappa,\lambda \\ \mathrm{ggT}(\kappa,\lambda,n)=1}} \left(\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{\kappa\lambda}\right) = e^{\frac{2\pi i}{32}\left(-7\Phi(n)+3\varphi(n)+\frac{1}{n}\prod_{p\mid n}(1-p)\right)} \cdot \begin{cases} \sqrt{p} & \text{für } n=p^{\nu},\ \nu\geq \\ & \text{(p ungerade Primzahl)}, \\ 1 & \text{sonst}; \end{cases}$$

dabei ist wie immer

$$\sigma^{*}\left(\frac{\kappa\omega_1+\lambda\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2\right) =: \sigma_{\kappa\lambda}(\omega_1,\omega_2) = \sigma_{\kappa\lambda}$$

abgekürzt worden.

Das bei der Produktbildung entstehende Zählerprodukt ist wegen der „falschen" Indexpaare (κ,λ), die ja auf n und nicht auf den Teiler d bezogen sind, nicht ohne weiteres berechenbar. Es entsteht somit das Problem, diese Indexpaare (κ,λ) passend auf den Teiler d zu beziehen. Dieses keineswegs einfache Problem soll nun im folgenden behandelt werden.

Wie schon auf Seite 39 bemerkt, gilt:

$$\mathrm{ggT}(\kappa,\lambda,n)=1 \Longrightarrow \mathrm{ggT}(\kappa,\lambda,d)=1 .$$

Dies besagt, daß jedes Restklassenpaar (κ,λ) modulo n welches modulo n primitiv ist, auch für jeden Teiler $d\mid n$ modulo d primitiv ist. Es stellt sich dann naturgemäß die Frage, wieviele primitive Restklassenpaare modulo n (Anzahl $\Phi(n)$) zu einem vorgegebenen Restklassenpaar, welches modulo d primitiv ist (Anzahl $\Phi(d)$), modulo d kongruent sind.

Die Antwort auf diese Frage lautet:

<u>Satz</u>: Die Anzahl der primitiven Restklassenpaare modulo n, welche zu <u>einem</u> vorgegebenen primitiven Restklassenpaar modulo d kongruent sind, ist stets dieselbe und berechnet sich als die natürliche Zahl

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(d)} \in \mathbb{N} \quad \text{für } d|n \, .$$

<u>Beweisskizze</u>: Die Menge aller $\Phi(n)$ primitiven Restklassenpaare $\{(m_1, m_2) \bmod n, \ \mathrm{ggT}(m_1, m_2, n) = 1\}$ erfährt vermöge der Substitution

$$(m_1, m_2) \bmod n \longmapsto (m_1, m_2) M \bmod n$$

eine Permutation. Dabei ist

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ eine unimodulare Matrix,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \, .$

Diese Permutationen bilden eine Permutationsgruppe, welche auf der obigen Menge <u>transitiv</u> operiert. Diese Menge wird nun in Hinblick auf die ursprüngliche Fragestellung passend in <u>Imprimitivitätssysteme</u> zerlegt, die sämtlich die gleiche (endliche) Mächtigkeit

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi(d)} \in \mathbb{N} \quad \text{für } d|n$$

haben. Diese stimmt auf Grund der Konstruktion der Imprimitivitätssysteme mit der gesuchten Anzahl überein, womit das oben gestellte Problem gelöst ist.

Dann ist zu berechnen:

$$\frac{1}{8}\Big(p^{4\nu}-4p^{2\nu}+3-p^{4(\nu-1)}+4p^{2(\nu-1)}-3-$$
$$-2p^{2(2\nu-1)}+2p^{4(\nu-1)}+2p^{2\nu}-2p^{2(\nu-1)}\Big)=$$
$$=\frac{1}{8}\Big(p^{4\nu}-2p^{2\nu}+p^{4(\nu-1)}+2p^{2(\nu-1)}-2p^{2(2\nu-1)}\Big)\overset{!}{=}$$
$$=\frac{1}{8}\Big(p^{2\nu}-p^{2(\nu-1)}\Big)\cdot\Big(p^{2\nu}-p^{2(\nu-1)}-2\Big)=$$
$$=\binom{\frac{1}{2}\big(p^{2\nu}-p^{2(\nu-1)}\big)}{2}=\binom{\frac{1}{2}p^{2\nu}\big(1-\frac{1}{p^2}\big)}{2}=$$
$$=\binom{\frac{1}{2}\Phi(p^\nu)}{2}.$$

Vermöge der vorangehenden Einzelergebnisse erhält man nunmehr die folgende endgültige <u>Diskriminantenformel</u>:

$$D\big(F_{p^\nu}\big)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{p^{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\Phi(p^\nu)}}{p^{\frac{p^{2(\nu-1)}-3}{2}}}\cdot\big(\sqrt[3]{\Delta}\big)^{\binom{\frac{1}{2}\Phi(p^\nu)}{2}}=$$
$$=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{p^{\frac{\nu-1}{2}\Phi(p^\nu)}}{p^{\frac{p^{2\nu}-3}{2}}}\cdot\big(\sqrt[3]{\Delta}\big)^{\binom{\frac{1}{2}\Phi(p^\nu)}{2}}$$

$$\text{mit } \Phi(p^\nu)=p^{2(\nu-1)}(p^2-1).$$

Diese Formel stimmt übrigens auch im bislang ausgeschlossenen Fall $\nu=1$!

Vermöge der vorangehenden Einzelergebnisse erhält man nunmehr die folgende endgültige

<u>**Diskriminantenformel:**</u>

$$D(F_{p_1p_2}) = \frac{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}\Phi(p_1p_2)}}{p_1^{\frac{1}{2}\Phi(p_2)} \cdot p_2^{\frac{1}{2}\Phi(p_1)}} \left(\sqrt[3]{\Delta}\right)^{\binom{\frac{1}{2}\Phi(p_1p_2)}{2}} =$$

$$= \frac{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}\Phi(p_1p_2)}}{p_1^{\frac{1}{2}\frac{\Phi(p_1p_2)}{\Phi(p_1)}} \cdot p_2^{\frac{1}{2}\frac{\Phi(p_1p_2)}{\Phi(p_2)}}} \left(\sqrt[3]{\Delta}\right)^{\binom{\frac{1}{2}\Phi(p_1p_2)}{2}}$$

Hierbei ist $\operatorname{grad} F_{p_1p_2}(x) = \frac{1}{2}\Phi(p_1p_2)$, so daß für die <u>normierte Diskriminante</u> genau

$$\binom{\frac{1}{2}\Phi(p_1p_2)}{2} \text{ Faktoren } \left(\sqrt[6]{\Delta}\right)^2 = \sqrt[3]{\Delta}$$

als Faktoren im Nenner benötigt werden, in Übereinstimmung mit dem vorstehenden Ergebnis.

Die für die explizite Berechnung der Diskriminante $D(F_n(x))$ auf Blatt 366 angegebene grundlegende polynomische Formel zeigt, daß nur in den beiden Spezialfällen $n = p^\nu$ und $n = p_1 \cdot p_2$ auf der rechten Seite dieser polynomischen Identität ausschließlich das Polynom $f_n(x)$ auftritt, wodurch <u>gemeinsame Nullstellen auf beiden Seiten dieser polynomischen Identität</u> verhindert werden.